DOI:10.16152/j.cnki.xdxbzr.2011.03.030

西北大学学报(自然科学版)
2011年6月,第41卷第3期,Jun.,2011,Vol.41,No.3
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)

·数理科学与信息科学·

关于Smarandache函数的一个下界估计

李粉菊[1],杨畅宇[2]

(1.铜川职业技术学院,陕西 铜川 727031;2.明尼苏达圣玛丽大学 数学与统计学系,美国 威诺纳市 55987)

摘要: 目的 研究Smarandache函数在某些特殊值上的下界估计。方法 利用初等及组合方法。结果 证明了估计式 $S(a^p+b^p)\geqslant 8p+1$,其中 p 为任意大于17的素数,a 及 b 为任意不同的正整数。结论 给出了Smarandache函数在某些特殊值上的一个较强的下界估计。

关 键 词: Smarandache函数;下界估计;初等方法;组合方法

中图分类号: O156.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-274X(2011)03-0377-03

A lower bound estimate problem for the Smarandache function

LI Fen-jü[1], YANG Chang-yu[2]

(1. Tongchuan Vocational and Technical College, Tongchuan 727031, China;
2. Department of Mathematics & Statistics, Saint Mary´s University of Minnesota, Winona, Minnesota 55987, USA)

Abstract: Aim To study a lower bound estimate problem of the Smarandache function at some special values. **Methods** Using the elementary and combinational methods. **Results** It is proved the estimate $S(a^p+b^p)\geqslant 8p+1$, where $p\geqslant 17$ be any prime, a and b are two positive integers with $a\neq b$. **Conclusion** A new lower bound estimate of the Smarandache function (at some special values) is given.

Key words: Smarandache function; lower bound estimate; elementary method; combinational method

对于任意正整数 n,著名的F. Smarandache函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n\mid m!$。即 $S(n)=\min\{m: m\in N, n\mid m!\}$,其中 N 表示所有正整数之集合。从 $S(n)$ 的定义人们容易推出如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示 n 的标准分解式,那么 $S(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$。由此计算出 $S(1)=1$,$S(2)=2$,$S(3)=3$,$S(4)=4$,$S(5)=5$,$S(6)=3$,$S(7)=7$,$S(8)=4$,$S(9)=6$,$S(10)=5$,$S(11)=11$,$S(12)=4$,$S(13)=13$,$S(14)=7$,$S(15)=5$,$S(16)=6$,…。关于 $S(n)$ 的算术性质,许多学者也进行了研究,获得了不少有趣的结果[1-3]。例如文献[3]中研究了 $S(n)$ 的值分布问题,证明了渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)。$$

其中 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子,$\zeta(s)$ 表示Riemann zeta-函数。

另一方面,文献[4]中研究了 $S(2^{p-1}(2^p-1))$ 的下界估计问题,并给出了估计式

$$S(2^{p-1}(2^p-1))\geqslant 2p+1。$$

其中 p 为任意奇素数。

文献[5]将文献[4]中的结果进行了改进,证明了当素数 $p\geqslant 7$ 时,

$$S(2^{p-1}(2^{p-1}))\geqslant 6p+1。$$

此外,文献[6]还研究了 $S(2^p+1)$ 的估计问题,获得了同样的结论,即证明了对任意素数 $p\geqslant 7$,有估计式

$$S(2^p+1)\geqslant 6p+1。$$

文献[7]研究了Smarandache函数对费尔马数列的估计问题,证明了对任意正整数 $n\geqslant 3$,有

收稿日期:2010-03-11
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155)
作者简介:李粉菊,女,铜川职业技术学院副教授,从事基础数学研究。

$$S(F_n)=S(2^{2^n}+1)\geq 8\cdot 2^n+1。$$

其中$F_n=2^{2^n}+1$称为费尔马数,关于这一数列的性质,可参阅文献[8]。

这些学者为什么要研究这些特殊数列呢?其原因在于数列$2^{p-1}(2^p-1)$有着深刻的数学背景。事实上$M_p=2^p-1$就是著名的梅森尼数。梅森尼曾猜测对所有素数p,M_p为素数。然而,这一猜测后来被验证是错误的,因为$M_{11}=2^{11}-1=23\times 89$,而数列$2^{p-1}(2p-1)$与一个古老的数论难题——偶完全数密切相关。这也就是说一个偶数$2N$为完全数,当且仅$2N=2^{p-1}(2^p-1)$,其中$M_p=2^p-1$为梅森尼素数。例如6,28就是两个偶完全数。是否存在无穷多个偶完全数是一个至今未解决的数论难题。当然,是否存在奇完全数更不得而知。有关这一内容可参阅文献[8-9]。

1 结 论

本文作为文献[6-7]的注释,利用初等及组合方法研究了Smarandache函数$S(n)$在特殊数列a^p+b^p上的下界估计问题,并得到了一个一般性的结论。具体地说即证明了下面的定理。

定理1 设$p\geq 17$为素数,则对任意不同的正整数a及b,有估计式

$$S(a^p+b^p)\geq 8p+1。$$

显然定理1中的下界估计明显地优于文献[4]以及文献[6]中的结果。特别当$a=2$,$b=1$时,立刻推出估计式$S(2^p+1)\geq 8p+1$。因此利用本文的方法完全可以改进文献[4-5]中的下界。

2 定理1的证明

利用初等方法给出定理1的证明。为叙述方便,首先给出下面的引理。

引理1 设p为奇素数,则对任意互素的整数a及b且$a+b\neq 0$,有

$$\left(\frac{a^p+b^p}{a+b},a+b\right)=1\text{ 或 }p。$$

证 明 设$\left(\frac{a^p+b^p}{a+b},a+b\right)=d$,$a+b=dh$,$\frac{a^p+b^p}{a+b}=dk$,则$(h,k)=1$且

$$d^2hk=a^p+b^p=a^p+(dh-a)^p=\sum_{i=0}^{p-1}C_p^i(dh)^{p-i}(-1)^ia^i=$$

$$pdha^{p-1}+\sum_{i=0}^{p-2}C_p^i(dh)^{p-i}(-1)^ia^i。\tag{1}$$

注意到$(a,b)=1$,d整除$a+b$,所以$(d,a)=1$,从而由式(1)立刻推出$d\mid p$,所以$d=1$或者p。于是,完成了引理1的证明。

现在借助于引理1来完成定理1的证明。因为a和b为不同的正整数,所以可设$a=d\cdot a_1$,$b=d\cdot b_1$,$(a_1,b_1)=1$,$a^p+b^p=d^p\cdot(a_1^p+b_1^p)$。由Smarandache函数$S(n)$的性质知

$$S(a^p+b^p)=S(d^p\cdot(a_1^p+b_1^p))\geq S(a_1^p+b_1^p)。\tag{2}$$

于是为证明定理1,注意到式(2),不失一般性可假定$(a,b)=1$,$a\cdot b>1$。

对于任意素数$q\mid n$,有$S(n)\geq q$且$q\mid S(q^\alpha)$对所有正整数α成立。现在,先证明a^p+b^p不可能为p的方幂。若不然,则有$a^p+b^p=p^\alpha$。由于p为奇素数,当$\alpha=2$时,由于$a^p+b^p>2p>p^2$,所以$\alpha\geq 3$,由前面的引理1不难推出$a+b=p^ku$,$1\leq k\leq\alpha-2$,$(u,p)=1$。再由

$$p^\alpha=a^p+b^p=a^p+(up^k-a)^p=\sum_{i=0}^{p-1}C_p^iu^{p-i}p^{k(p-i)}(-1)^i\alpha^i=$$

$$p^{k+1}ua^{p-1}+\sum_{i=0}^{p-2}C_p^iu^{p-i}p^{k(p-i)}(-1)^ia^i$$

或者

$$p^\alpha-\sum_{i=0}^{p-2}C_p^iu^{p-i}p^{k(p-i)}(-1)^ia^i=p^{k+1}ua^{p-1},$$

上式左边能被p^{k+2}整除,但是右边不能,矛盾。所以a^p+b^p不可能为p的方幂。于是,存在素数$q\neq p$且q整除$\frac{a^p+b^p}{a+b}$。即

$$a^p+b^p\equiv 0(\bmod q)\text{ 或者 }(a\cdot\bar{b})^p\equiv -1(\bmod q),$$

从而有

$$(a\cdot\bar{b})^{2p}\equiv 1(\bmod q)。\tag{3}$$

设m是$(a\cdot\bar{b})$模q的指标,则由式(3)及指标的性质[8-9]知$m\mid 2p$。于是m最多有4种可能:$m=1,2,p,2p$。显然$m\neq 1,2,p$。因为若$m=1$,则$a\equiv b(\bmod q)$,与$(a,b)=1$且q整除a^p+b^p矛盾。若$m=2$,则$a\cdot\bar{b}\equiv -1(\bmod q)$或者$a+b\equiv 0(\bmod q)$。与引理1及$q$整除$\frac{a^p+b^p}{a+b}$矛盾。再由前面同余式$(a\cdot\bar{b})^p\equiv -1(\bmod q)$知$m$不可能等于$p$,所以只有$m=2p$。再由指标的性质知$m\mid(q)=q-1$,即

$$q-1=h\cdot m=h\cdot 2p$$

或

$$q = h \cdot 2p + 1。\qquad (4)$$

于是由式(4)知当 $a^p + b^p$ 除 p 之外，至少含有4个不同的素因子时，一定有一个素因子 q，使得

$$q = h \cdot 2p + 1 \geqslant 4 \cdot 2 \cdot p + 1 = 8p + 1。$$

当 $a^p + b^p$ 含有3个不等于 p 的素因子 q_1, q_2 及 q_3 时，由式(4)可设 $q_1 = 2h_1p + 1, q_2 = 2h_2p + 1, q_3 = 2h_3p + 1$ 且 $h_1 < h_2 < h_3$。此时 h_1 和 h_2 不可能同时为1和2。若不然，注意到 $p \geqslant 11$，则在 $p, p_1 = 2p + 1$ 和 $p_2 = 4p + 1$ 这3个素数中，至少有一个能被3整除，这与 p, q_1 和 q_2 同时为素数矛盾。因此，h_1, h_2 及 h_3 中至少有一个不妨设 h_3 大于或等于4，此时有 $q_3 = 2h_3p + 1 \geqslant 8p + 1$。

下面讨论 $a^p + b^p$ 含有两个不等于 p 的素因子 q 的情况。此时由函数 $S(n)$ 的性质可知最多只需考虑下面两种形式：

$a^p + b^p = p^\alpha \cdot (2p+1)^\beta \cdot (6p+1)\gamma$ 或者 $a^p + b^p = p^\alpha \cdot (4p+1)^\beta \cdot (6p+1)\gamma$。

若 $a^p + b^p = p^\alpha \cdot (2p+1)^\beta \cdot (6p+1)\gamma$ 成立，则当 $\beta \geqslant 4$ 或者 $\gamma \geqslant 2$ 时，由 $S(n)$ 的性质可得

$$S(a^p + b^p) \geqslant S((2p+1)^\beta) = \beta(2p+1) \geqslant 4 \cdot (2p+1) = 8p + 3 \geqslant 8p + 1$$

或者

$$S(a^p + b^p) \geqslant S((6p+1)^\gamma) = \gamma(6p+1) \geqslant 2 \cdot (6p+1) = 12p + 2 \geqslant 8p + 1。$$

于是，假定 $1 \leqslant \beta \leqslant 3, \gamma = 1$。现在证明在这种情况下当 $p \geqslant 17$ 时，$a^p + b^p$ 不可能含有 p 的方幂。若不然，当 $\alpha \geqslant 2$ 时，由于 p 整除 $a + b$，设 $a + b = p^k \cdot u$，$(p, u) = 1$，则由前面的引理1知 $k = \alpha$ 或者 $\alpha - 1$。显然由 $a^p + b^p = p^\alpha \cdot (2p+1)^\beta \cdot (6p+1)^\gamma$ 知 $k = \alpha$ 不可能成立，因为此时 $p^{\alpha+1}$ 整除 $a^p + b^p$。于是，可设 $k = \alpha - 1$。从而由 $a + b = p^{\alpha-1} \cdot u$ 可得

$$2 \cdot \left(\frac{p^{\alpha-1}}{2}\right) \leqslant 2 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leqslant a^p + b^p = p^a \cdot (2p+1)\beta \cdot (6p+1)^\gamma。$$

注意到，$\alpha \geqslant 2, 1 \leqslant \beta \leqslant 3, \gamma = 1$，所以当 $p \geqslant 17$ 时容易验证上式显然不成立。

当 $\alpha = 1$ 时，由于 $a^p + b^p \equiv a + b \bmod p$，所以 $k = \alpha = 1$，由前面理由可知 $p^2 \mid a^p + b^p$，这是不可能的。所以 $a^p + b^p$ 不可能含有素因子 p。这样立刻得到

$$2^p + 1 \leqslant a^p + b^p = (2p+1)^\beta \cdot (6p+1)。$$

其中 $1 \leqslant \beta \leqslant 3$。当 $p \geqslant 17$ 时，经过计算上式不等式是不可能成立的。

同理可以证明当 $p \geqslant 17$ 时，$a^p + b^p = p^\alpha \cdot (4p+1)^\beta \cdot (6p+1)^\gamma$ 且 $\beta = \gamma = 1$ 是不可能的，而当 $\beta \geqslant 2$ 或者 $\gamma \geqslant 2$ 时，由 $S(n)$ 的性质知 $S(a^p + b^p) \geqslant 8p + 1$ 是显然的。

现在讨论 $a^p + b^p$ 仅含有一个不等于 p 的素因子 q 的情况。只需讨论：$a^p + b^p = p^\alpha \cdot (4p+1)^\beta$，或者 $a^p + b^p = p^\alpha \cdot (4p+1)^\beta$，或者 $a^p + b^p = p^\alpha \cdot (6p+1)^\beta$ · 若 $a^p + b^p = p^\alpha \cdot (2p+1)^\beta$ 成立，则当 $\beta \geqslant 4$ 时，显然有估计式

$$S(a^p + b^p) \geqslant S((2p+1)^4) = 4 \cdot (2p+1) \geqslant 8p + 1。$$

当 $\beta \leqslant 3$ 时，由前面的证明过程可知当 $p \geqslant 17$ 时，若 $\alpha \geqslant 1$，则 $a^p + b^p = p^\alpha \cdot (2p+1)^\beta$ 不可能成立；同样若 $\alpha = 0$，则 $a^p + b^p = (2p+1)^\beta$ 且 $1 \leqslant \beta \leqslant 3$ 也不成立成立。

同理可证明第二和第三种情况 $a^p + b^p = p^\alpha \cdot (4p+1)^\beta$ 及 $a^p + b^p = p^\alpha \cdot (6p+1)^\beta$。

于是，完成了定理的证明。

参考文献：

[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] 杜凤英. 关于 Smarandache 函数 $S(n)$ 的一个猜想 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(2): 205-208.

[3] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布 [J]. 数学学报, 2006, 49(5): 1009-1012.

[4] MOHUA L. A lower bound for $S(2^{p-1}(2^p - 1))$ [J]. Smarandache Notions Journal, 2001, 12(1-3): 217-218.

[5] 苏娟丽. 关于 Smarandache 函数的一个下界估计 [J]. 纺织高校基础科学学报, 2009, 22(1): 133-134.

[6] 苏娟丽. 关于 Smarandache 函数的一个新的下界估计 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2008, 24(4): 706-708.

[7] WANG Jin-rui. On the Smarandache function and the Fermat numbers [J]. Scientia Magna, 2008, 4(2): 25-28.

[8] APOSTOL T M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[9] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

（编　辑　亢小玉）